Grundwissen • Klasse 8 ①

erstellt von A. Bönning

Terme

MERKE

Terme, die sich nur in den Koeffizienten (Zahlfaktoren) vor den Variablen unterscheiden, nennt man **gleichartig**. Man kann nur gleichartige Terme addieren und subtrahieren. Bei der Multiplikation werden Variablen und Koeffizienten getrennt voneinander multipliziert.

Beispiele:

① $3x + 4x^2 - 6x - 1 + 2x^2 + 3 = 4x^2 + 2x^2 + 3x - 6x - 1 + 3 = 6x^2 - 3x + 2$

② $6ac \cdot (-3)ab \cdot 2ac = 6 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c = -36a^3bc^2$

Klammern auflösen

+ vor der Klammer	– vor der Klammer
$a + (b + c) = a + b + c$ Die Zeichen in der Klammer ändern sich nicht!	$a - (b + c) = a - b - c$ Die Zeichen in der Klammer drehen sich um!
① $2x + (-y + 8z) = 2x - y + 8z$ ② $-7a + (b - 6c) = -7a + b - 6c$	① $3x - (-4y + 5z) = 3x + 4y - 5z$ ② $-5a - (2b - c) = -5a - 2b + c$

Beispiele

Ausmultiplizieren

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Beispiele: $-2 \cdot (-4 + 3x)$
$= -2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 3x$
$= 8 - 6x$

Distributivgesetz

Ausklammern/Faktorisieren

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

$-6x^2y - 3y$
$= -3 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot y + (-3) \cdot y \cdot 1$
$= -3 \cdot y\,(2x^2 + 1)$

Summenterme ausmultiplizieren

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Beispiel: $(2x - 4) \cdot (3y + 6) = 2x \cdot 3y + 2x \cdot 6 - 4 \cdot 3y - 4 \cdot 6 = 6xy + 12x - 12y - 24$

erstellt von A. Bönning

Quadratische Terme

Binomische Formeln

1 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Beispiel: $(x + 0{,}5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = x^2 + x + 0{,}25$

2 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Beispiel: $(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 = 9x^2 - 24x + 16$

3 $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Beispiel: $\left(\frac{3}{5}y + 1\right) \cdot \left(\frac{3}{5}y - 1\right) = \left(\frac{3}{5}y\right)^2 - 1^2 = \frac{9}{25}y^2 - 1$

Extremwerte

Um das Maximum bzw. das Minimum eines quadratischen Termes bestimmen zu können, muss der Term folgende Form besitzen: $a \cdot (x - m)^2 + n$.

⇨ Wenn $a > 0$ ist, hat der Term das **Minimum** n für $x = m$ (Schreibweise: $T_{min} = n$ für $x = m$)
⇨ Wenn $a < 0$ ist, hat der Term das **Maximum** n für $x = m$ (Schreibweise: $T_{max} = n$ für $x = m$)

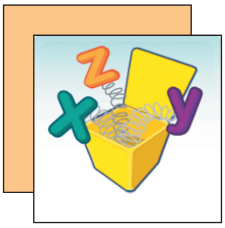
Falls ein Term nicht die Form $a \cdot (x - m)^2 + n$ besitzt, kann er durch **quadratische Ergänzung** umgewandelt werden. Das geschieht nach diesem Schema:

	Beispiel:	$T(x) = -2x^2 - 12x + 20$
①	Klammere den Koeffizienten des quadratischen Termes aus.	$T(x) = -2 \cdot (x^2 + 6x) + 20$
②	Stelle den linearen Term als Produkt mit dem Faktor 2 dar.	$T(x) = -2 \cdot (x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x) + 20$
	Addiere und subtrahiere das Quadrat des entstandenen Faktors.	$T(x) = -2 \cdot (x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2) + 20$
③	Wende die binomische Formel an.	$T(x) = -2 \cdot [(x + 3)^2 - 3^2] + 20$
④	Multipliziere die eckige Klammer aus.	$T(x) = -2 \cdot (x + 3)^2 + 19 + 20$
	Berechne den Wert des Zahlenterms.	$T(x) = -2 \cdot (x + 3)^2 + 38$
⑤	Lies den Extremwert ab.	$T_{max} = 38$ für $x = -3$

erstellt von A. Bönning

Gleichungen und Ungleichungen

Gleichungen/Ungleichungen mit Variablen auf beiden Seiten werden so gelöst:



① Löse alle Klammern auf und fasse gleichartige Terme zusammen.
② Bringe durch Äquivalenzumformungen alle Terme mit Variablen auf die eine Seite, alle Zahlen auf die andere Seite der Gleichung/Ungleichung.
③ Teile durch den Koeffizienten vor der Variablen.
☞ Achte bei Ungleichungen auf das Inversionsgesetz!
④ Gib die Lösungsmenge an.
☞ Achte bei Ungleichungen auf die beschreibende Form der Lösungsmenge!

Beispiel

$$
\begin{aligned}
&-11x + 2(x-5) - 2 < 14 - 3(x-4) - (10-20)\\
&-11x + 2x - 10 - 2 < 14 - 3x + 12 - 10 + 20\\
&-9x - 12 < -3x + 36 \quad |+3x\\
\Leftrightarrow\ &-6x - 12 < 36 \quad | + 12\\
\Leftrightarrow\ &-6x < 48 \quad | : (-6)\\
\Leftrightarrow\ &x > -8\\
&\mathbb{L} = \{x \mid x > -8\}
\end{aligned}
$$

Bruchterme und Bruchgleichungen

- Terme mit mindestens einer Variablen im Nenner heißen **Bruchterme**.

  Beispiele: $\frac{1}{z}$; $\frac{3-c}{c-3}$; $\frac{5}{2(a-b)}$; $\frac{6y}{4y^2-6y}$

- Da die Division durch Null nicht definiert ist, muss immer die **Definitionsmenge** bestimmt werden.

  Beispiel: $\frac{2-x}{x+4}$ $(\mathbb{G} = \mathbb{Q})$ ⇨ $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{-4\}$, da $x + 4 = 0$ für $x = -4$

- Gleichungen, die mindestens einen Bruchterm enthalten, heißen **Bruchgleichungen**.

  Beispiele: $\frac{24}{a-3} = 23$; $\frac{5}{y-7} = \frac{6}{y}$

- Man kann Bruchgleichungen durch **„über Kreuz multiplizieren"** lösen.

  Beispiel: $\frac{6}{x+2} = \frac{8}{x}$ ⇨ $6 \cdot x = 8 \cdot (x+2)$ (Hinweis: Löse ab hier wie oben beschrieben)

- Ist die Lösung der Bruchgleichung nicht in in der Definitionsmenge enthalten gilt: $\mathbb{L} = \varnothing$

Alle Regeln für Brüche gelten auch für Bruchterme (siehe Grundwissen Klasse 6).

erstellt von A. Bönning

Lineare Funktionen

Wird jedem Element x der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ **genau ein** Wert y der Wertemenge $\mathbb{W}$ zugeordnet, so spricht man von einer **Funktion f**. Bei einer linearen Funktion kommt die Variable x in der Funktionsgleichung in der ersten Potenz vor. Die Punkte des **Graphen** einer linearen Funktion liegen auf einer Geraden. Meist wird die **Funktionsgleichung** in ihrer Normalform dargestellt. Sie kann aber auch in der allgemeinen Form vorliegen.

Normalform ①	allgemeine Form ②	Beispiele ①	Beispiele ②
$y = m \cdot x + t$ m: Steigungsfaktor t: y-Achsenabschnitt	$ax + by + c = 0$ $a, b, c \in \mathbb{Q}$	$y = 2x^*$ $y = 0{,}5x - 3$ $y = \frac{1}{3}x + 4$	$2x - y = 0$ $0{,}5x - y - 3 = 0$ $\frac{1}{3}x - y + 4 = 0$

* Gleichung einer Ursprungsgeraden

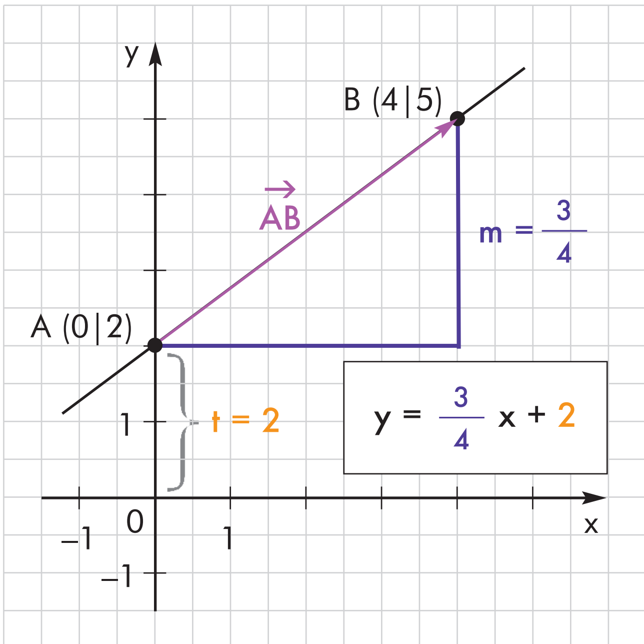
Eine Funktion ist durch den **Funktionsterm** f(x) festgelegt.
Durch Belegung der Variablen x des Funktionsterms erhält man den zugehörigen **Funktionswert**.

Beispiel: $f(x) = 4 \cdot x + 1 \Rightarrow f(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 13$ (Lies: „Der Funktionswert an der Stelle x = 3 ist 13")

Der Steigungsfaktor m

Jede Gerade ist durch ein Steigungsdreieck gekennzeichnet. Durch die Punkte A $(x_A|y_A)$ und B $(x_B|y_B)$ ist dabei der Steigungsvektor $\overrightarrow{AB}$ und die Steigung m festgelegt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \qquad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad (x_B \neq x_A)$$



Beispiel (s. Zeichnung)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m = \frac{5 - 2}{4 - 0} = \frac{3}{4}$$

So kannst du den Graphen einer Funktion zeichnen:

① Markiere den y-Achsenabschnitt.
☞ hier: t = 2

② Zeichne von t aus das Steigungsdreieck.
☞ hier: $m = \frac{3}{4}$ (4 nach rechts, 3 nach oben)

③ Zeichne den Funktionsgraphen.

Geradengleichungen aufstellen

a) Gegeben: Punkt P $(x_P|y_P) \in g$ und y-Achsenabschnitt t

① Setze die Koordinaten des Punktes P $(x_P|y_P)$ und den y-Achsenabschnitt t in die Normalform $y_P = m \cdot x_P + t$ ein.
② Löse die Gleichung nach m auf.
③ Gib die Geradengleichung der Gerade g an.

b) Gegeben: Punkt P $(x_P|y_P) \in g$ und Steigung m

① Setze die Koordinaten des Punktes P $(x_p|y_p)$ und die Steigung m in die **Punkt-Steigungs-Form** $y = m \cdot (x - x_p) + y_p$ ein.
② Löse die Klammern der Gleichung auf.
③ Gib die Geradengleichung der Gerade g an.

Hinweis: Du kannst die Gleichung auch wie in a) beschrieben aufstellen!

c) Gegeben: Punkt A $(x_A|y_A)$ und Punkt B $(x_B|y_B)$

① Berechne mit Hilfe der Punkte A $(x_A|y_A)$ und Punkt B $(x_B|y_B)$ die Steigung m der Geraden g (siehe Seite ④ unten).
② Rechne weiter wie in b) vorgegeben.

Beispiele

a) P (3|2); t = 3,5

$2 = m \cdot 3 + 3{,}5 \quad | -3{,}5$

⇔ $-1{,}5 = m \cdot 3 \quad | : 3$

⇔ $m = -0{,}5$

⇨ g: $y = -0{,}5x + 3{,}5$

b) P (3|4); m = –2

$y = -2 \cdot (x - 3) + 4$

$y = -2x + 6 + 4$

$y = -2x + 10$

⇨ g: $y = -2x + 10$

Zwei Geraden g und h sind **parallel**, wenn sie zwar einen unterschiedlichen y-Achsenabschnitt, aber die gleiche Steigung haben.

Beispiel: g: $y = 0{,}5 \cdot x + 3$
h: $y = 0{,}5 \cdot x - 5$
☞ $m_g = m_h$ ⇨ $g \parallel h$

Zwei Geraden g und h sind **orthogonal** (sie stehen senkrecht aufeinander), wenn das Produkt ihrer Steigungen –1 ergibt.

Beispiel: g: $y = 0{,}5 \cdot x + 3$
h: $y = -2 \cdot x - 5$
☞ $m_g \cdot m_h = -1$ ⇨ $g \perp h$

Mehrere mehrere parallele Geraden bilden eine Parallelenschar.

Die Nullstelle

Der x-Wert, für den y = 0 gilt, heißt Nullstelle der Funktion. Im Koordinatensystem liegt der zugehörige Punkt P (x|0) auf der x-Achse. So kannst du die Nullstelle berechnen:

① Ersetze die Variable y in der Geradengleichung durch 0.
② Löse die Gleichung nach x auf.
③ Gib die Nullstelle und den zugehörigen Punkt P an.

g: $y = 5x + 10$

$0 = 5x + 10 \quad | -10$

⇔ $-10 = 5x \quad | : 5$

⇔ $x = -2$

⇨ Nullstelle: $x = -2$

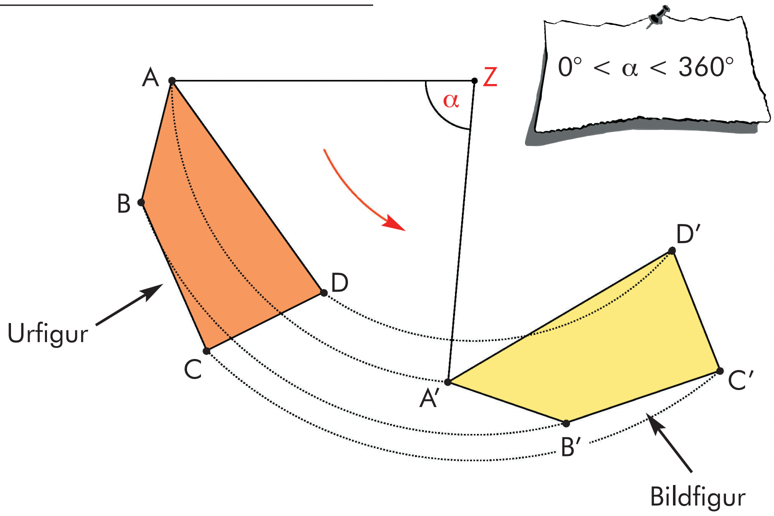
P (– 2|0)

erstellt von A. Bönning

Drehung

Eine Urfigur lässt sich durch Drehung auf genau eine Bildfigur abbilden. Die Drehung wird dabei durch Angabe des Drehzentrums Z, des Drehwinkelmaßes α und der Drehrichtung festgelegt.

Man schreibt: $A \xmapsto{Z;\ \alpha} A'$

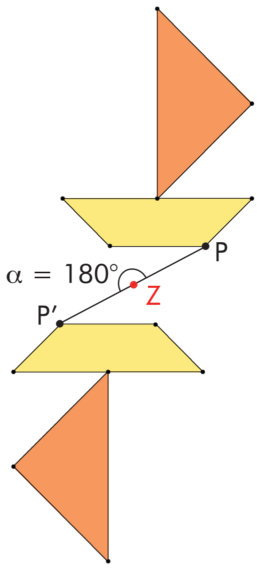


Eigenschaften

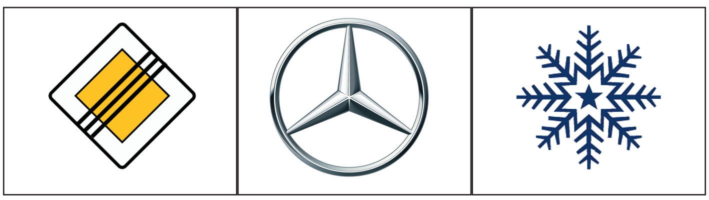
- Dreht man entgegen dem Uhrzeigersinn, so spricht man von **positiver Drehrichtung**.
- Urpunkt und Bildpunkt liegen auf einem Kreis um das Drehzentrum Z.
- Das Winkelmaß α gibt an, wie weit und in welche Richtung gedreht wird.
- Die Drehung ist eine **Kongruenzabbildung** (Ur- und Bildfigur sind deckungsgleich).
- Die Drehung ist längen- und winkeltreu, sowie geraden- und kreistreu.
- Urfigur und Bildfigur haben den gleichen Umlaufsinn.
- Das Drehzentrum Z ist der einzige **Fixpunkt**.
- Z liegt auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken von Ur- und Bildpunkt.

Drehung um 180°

- Eine Drehung um 180° heißt auch **Punktspiegelung** am Zentrum Z.
- Die Verbindungsstrecke von Urpunkt und Bildpunkt wird vom Drehzentrum Z halbiert, d. h. $|\overline{PZ}| = |\overline{ZP'}|$.
- Jede Gerade, die das Drehzentrum Z enthält, ist **Fixgerade**.
- Jede Gerade, die das Drehzentrum Z nicht enthält, wird auf eine parallele Gerade abgebildet.



Eine Figur heißt **drehsymmetrisch**, wenn sie bei einer Drehung um das Symmetriezentrum Z mit dem Winkelmaß α auf sich selbst abgebildet wird.



erstellt von A. Bönning

Drehung eines Vektors

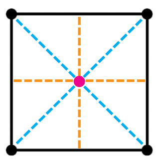
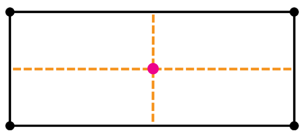
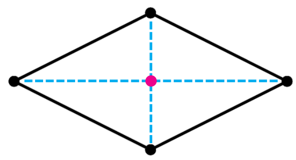
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \xrightarrow{Z;\,\alpha} \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

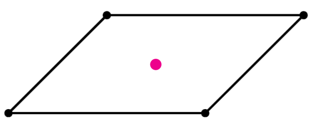
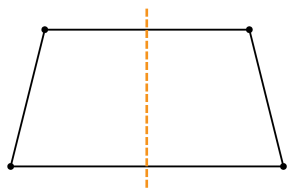
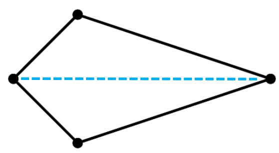
Drehung um 90°	Drehung um −90°	Drehung um 180°
$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} -v_x \\ -v_y \end{pmatrix}$
Beispiele		
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} 2 \\ +3 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} -7 \\ +1 \end{pmatrix}$

Berechnung von Bildkoordinaten über Vektorketten: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OZ} \oplus \overrightarrow{ZP'}$

Vierecke

MERKE: Die Summe der Innenwinkelmaße im Viereck beträgt 360° ($\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$).

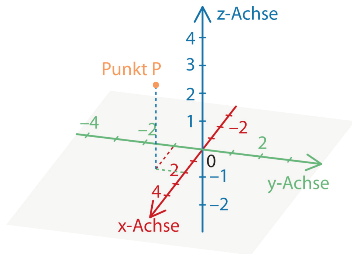
Punkt- **und** Achsensymmetrisch					
Quadrat		Rechteck		Raute	

Punktsymmetrisch		Achsensymmetrisch			
Parallelogramm		gleichschenkliges Trapez		Drachenviereck	

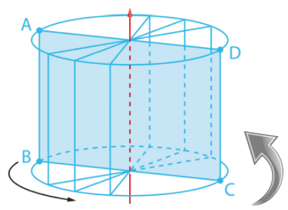
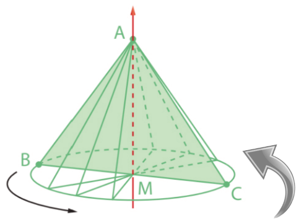
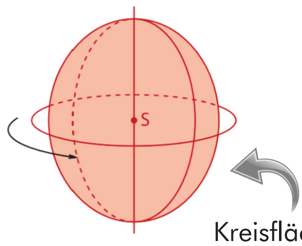
Vierecke, bei denen die Symmetrieachse auf zwei gegenüberliegenden Seiten senkrecht steht, heißen lotsymmetrisch.

Vierecke, bei denen die Symmetrieachse auf einer Diagonalen liegt, heißen diagonalsymmetrisch.

Raumgeometrie



Die Lage eines Punktes P im Raum ist durch sein **Koordinatentripel** $P(x|y|z)$ eindeutig bestimmt. Durch je zwei Koordinatenachsen wird eine Ebene festgelegt (die xy-, die xz- und die yz-Ebene).

Axialschnitte	Zylinder	Kegel	Kugel
	 Rechteck	 gleichschenkliges Dreieck	 Kreisfläche

Ein Körper ist **symmetrisch**, wenn er eine oder mehrere Symmetrieebenen besitzt. Ein Körper ist **punktsymmetrisch**, wenn er ein Symmetriezentrum Z besitzt. Ein Körper ist **drehsymmetrisch**, wenn er bei Drehung um eine Achse mit einem bestimmten Winkel auf sich selbst abgebildet wird.

Zufallsexperimente

Mit verschiedenen Zufallsgeräten (z. B. Zahlenräder, Münzen, Würfel) kann man Zufallsexperimente durchführen, bei denen man nicht vorhersagen kann, welches **Ergebnis** eintritt. Eine Menge möglicher Ergebnisse nennt man **Ereignis**.

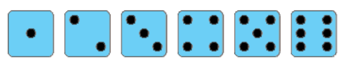
Wird ein Zufallsexperiment mehrfach wiederholt, kann überprüft werden, wie oft ein Ereignis eingetroffen ist. Diese Zahl nennt man **absolute Häufigkeit**. Aus dieser Zahl und der Anzahl der Versuche lässt sich die **relative Häufigkeit** berechnen:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl der Experimente}}$$

Beispiel

„Werfen eines Würfels"

mögliche Ergebnisse:



Ereignis „Würfeln einer geraden Zahl"

Im **Baumdiagramm** und mit der **Vierfeldertafel** (5. Klasse) lassen sich Zufallsexperimente gut veranschaulichen und Prozentanteile berechnen.

Beispiel: Bei 120 Würfen eines Würfels, trat 67 mal das Ereignis „gerade Zahl" ein. → **relative Häufigkeit** $= \frac{67}{120} = 0{,}558 \mathrel{\widehat{=}} 55{,}8\,\%$