Grundwissen • Klasse 7 ①

erstellt von A. Bönning

Potenzgesetze

$a, b \in \mathbb{Q}$
$m, n \in \mathbb{N}$

Potenzen mit gleichem Exponenten

Beispiel	Allgemein
$3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
$\frac{8^4}{4^4} = \left(\frac{8}{4}\right)^4 = 2^4 = 16$	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (b \neq 0)$

Merke:
$a^0 = 1$
$(a \neq 0)$

Potenzen mit gleicher Basis

Für Potenzen **mit negativer Basis in Klammern** gilt:

- Der Potenzwert ist **positiv** wenn der Exponent **gerade** ist.
  ☞ $(-3)^4 = 81$
  Achtung: $-3^4 = -81$
- Der Potenzwert ist **negativ**, wenn der Exponent **ungerade** ist.
  ☞ $(-3)^3 = -27$

Beispiel	Allgemein
$3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6 = 729$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\frac{5^8}{5^5} = 5^{8-5} = 5^3 = 125$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$
$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad (a \neq 0)$

Sehr große Zahlen und **sehr kleine Zahlen** können als Produkt einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz dargestellt werden. Bei sehr großen Zahlen ist der **Exponent positiv**, bei sehr kleinen Zahlen ist der **Exponent negativ**:

0^0 ist nicht definiert!

Beispiele

$5\,200\,000 = 5{,}2 \cdot 10^6$
$0{,}00495 = 4{,}95 \cdot 10^{-3}$

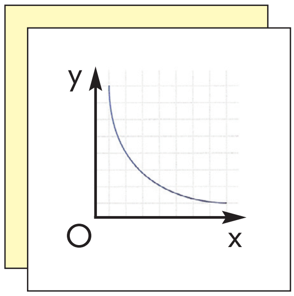
erstellt von A. Bönning

Indirekte Proportionalität

Eine Zuordnung x ⟶ y nennt man **indirekt proportional**, wenn gilt: Vervielfacht sich die Größe x um das n-fache, so teilt sich die Größe y durch n.

Eigenschaften:

- Alle Zahlenpaare (x|y) sind **produktgleich**.
- Das konstante Produkt k = y • x heißt **Proportionalitätskonstante**.
- Alle Punkte liegen auf einem **Hyperbelast**.



Prozentrechnung

verminderter und vermehrter Grundwert		
	Durch **Preisnachlass** ergibt sich aus dem ursprünglichen Grundwert ein neuer, **verminderter Grundwert**, den man auch als Prozentwert verstehen kann. ursprünglicher GW ≙ 100% **Verminderung: p%** verminderter GW ≙ 100% **– p%**	Durch **Preisaufschlag** ergibt sich aus dem ursprünglichen Grundwert ein neuer, **vermehrter Grundwert**, den man auch als Prozentwert verstehen kann. ursprünglicher GW ≙ 100% **Vermehrung: p%** verminderter GW ≙ 100% **+ p%**

Die **Zinsrechnung** ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Unter Zinsen versteht man den Geldbetrag, den man nach einer bestimmten Zeit – in der Regel nach einem Geschäftsjahr (360 Tage = 12 • 30 Tage) – für geliehenes Geld bezahlen muss oder für verliehenes Geld bekommt.

Es entsprechen sich:

Grundwert (GW)	Prozentwert (PW)	Prozentsatz (p)
↓	↓	↓
Kapital (K)	Zinsen (Z)	Zinssatz (p)

Beispiel

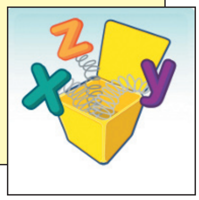
Für 940 € erhält man im Jahr 35,25 € Zinsen. Das Geld wurde mit 3,75% verzinst.

↑	↑	↑
Kapital (K)	Jahreszins (Z)	Zinssatz (p)
$K = \frac{Z \cdot 100}{p}$	$Z = \frac{K \cdot p}{100}$	$p = \frac{Z \cdot 100}{K}$

Grundwissen • Klasse 7 ③

erstellt von A. Bönning

Gleichungen und Ungleichungen



① Die Lösungsmenge einer **Gleichung** ändert sich nicht, wenn man ...
- ... auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert.
- ... beide Seiten mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder dividiert.

② Die Lösungsmenge einer **Ungleichung** ändert sich nicht, wenn man ...
- ... auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert.
- ... beide Seiten mit der gleichen positiven Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder dividiert.
- ... beide Seiten mit der gleichen negativen Zahl ($\neq 0$) multipliziert oder dividiert und das Ungleichheitszeichen umkehrt (**Inversionsgesetz**).

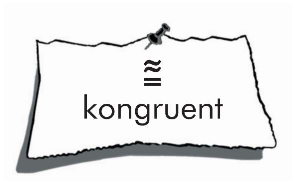
Diese Umformungen einer Gleichung bzw. Ungleichung heißen **Äquivalenzumformungen**.

Beispiele

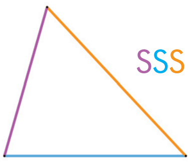
①
$$\begin{aligned} 2x + 5 - 6x - 4 &= 17 \\ -4x + 1 &= 17 \quad | -1 \\ \Leftrightarrow \quad -4x &= 16 \quad | :(-4) \\ \Leftrightarrow \quad x &= -4 \\ \mathbb{L} &= \{-4\} \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} 3x - 7 - 6x - 8 &> 3 \\ -3x - 15 &> 3 \quad | +15 \\ \Leftrightarrow \quad -3x &> 18 \quad | :(-3) \\ \Leftrightarrow \quad x &< -6 \\ \mathbb{L} &= \{x \mid x < -6\} \end{aligned}$$

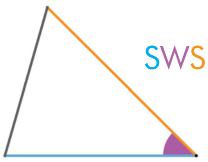
Dreiecke • Kongruenzsätze



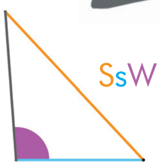
Dreiecke sind zueinander **kongruent**, und damit **eindeutig konstruierbar** ...



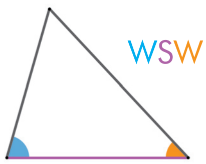
wenn sie in den Längen ihrer drei Seiten übereinstimmen.



wenn sie in den Längen zweier Seiten und dem Maß des Zwischenwinkels übereinstimmen.



wenn sie in den Längen zweier Seiten und dem Maß des Gegenwinkels der längeren Seite übereinstimmen.



wenn sie in der Länge einer Seite und den Maßen der beiden anliegenden Winkel übereinstimmen.

(Hinweis: Wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ kann das Maß des dritten Winkels immer berechnet werden!)

Dreiecksungleichung

Die Summe zweier Seitenlängen ist immer größer als die Länge der dritten Seite.

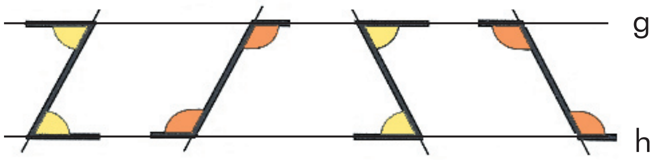
Seiten-Winkel-Beziehung

Der längeren Seite liegt immer der größere Winkel gegenüber.

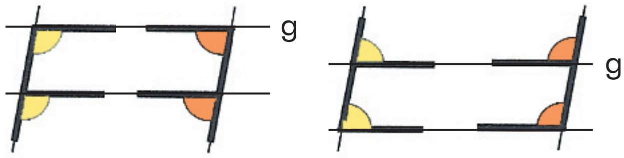
erstellt von A. Bönning

Winkel

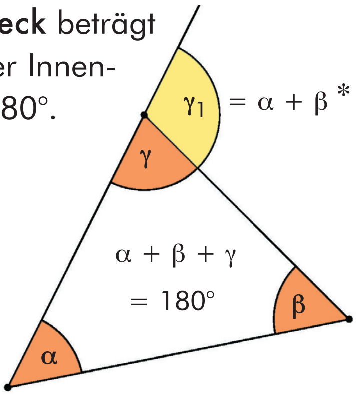
Wechselwinkel (Z-Winkel) an zwei parallelen Geraden g und h haben gleiches Maß:



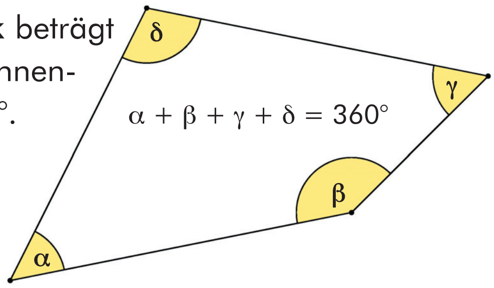
Stufenwinkel (F-Winkel) an zwei parallelen Geraden g und h haben gleiches Maß:



In jedem **Dreieck** beträgt die Summe der Innenwinkelmaße 180°.



In jedem **Viereck** beträgt die Summe der Innenwinkelmaße 360°.

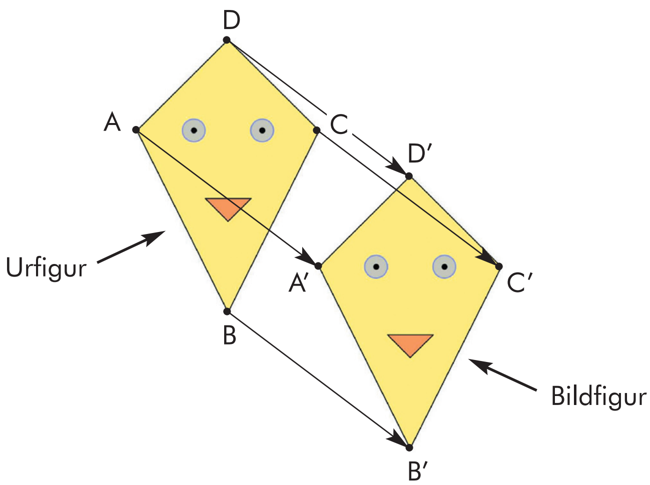


* Das Maß eines Außenwinkels ist gleich der Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

Parallelverschiebung

Wird einer Urfigur durch Verschiebung mit gleich langen, parallelen und gleich gerichteten Pfeilen genau eine Bildfigur zugeordnet, so handelt es sich bei der Abbildung um eine Parallelverschiebung.

Man schreibt: $A \xmapsto{\overrightarrow{AA'}} A'$



Eigenschaften

- Alle Verbindungsstrecken vom Ur- zum Bildpunkt sind gleich lang, parallel und gleich gerichtet.
- Die Parallelverschiebung ist eine **Kongruenzabbildung** (Ur- und Bildfigur sind deckungsgleich).
- Die Parallelverschiebung ist längen- und winkeltreu, sowie geraden- und kreistreu.
- Die Parallelverschiebung besitzt **keinen Fixpunkt**.
- Eine Gerade in Verschiebungsrichtung ist **Fixgerade**.

Vektoren

Die Menge paralleler, gleich langer und gleich gerichteter Pfeile bezeichnet man als Vektor $\vec{v}$.

Man schreibt: $\vec{v} = \{\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{BB'}; \overrightarrow{CC'}; \overrightarrow{DD'}; \dots\}$

Jeder der Pfeile $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, … ist **Repräsentant** des Vektors $\vec{v}$.

Die Koordinaten des Pfeiles $\overrightarrow{AA'}$ und damit des Vektors $\vec{v}$ kann mit dem Fußpunkt A $(x_A|y_A)$ und der Spitze A′ $(x_{A'}|y_{A'})$ berechnet werden:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} x_A - x_{A'} \\ y_A - y_{A'} \end{pmatrix}$$

Spitze – Fuß

Die Koordinaten eines Pfeiles mit dem Fußpunkt O (0|0) stimmen mit den Koordinaten der Spitze P $(x_P|y_P)$ überein.

Einen solchen Pfeil nennt man **Ortspfeil** $\overrightarrow{OP}$.

Für den **Gegenvektor** $\vec{v}^*$ eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ gilt: $\vec{v}^* = \begin{pmatrix} -v_x \\ -v_y \end{pmatrix}$

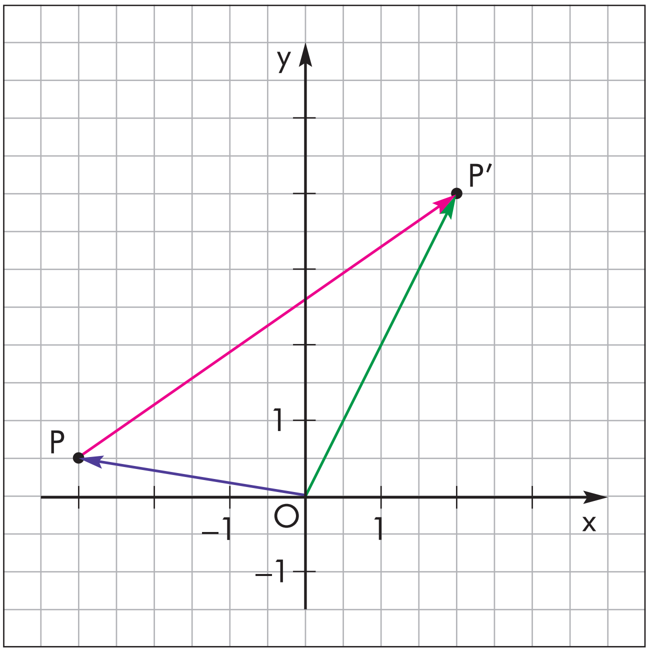
Rechnen mit Vektoren

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Kommutativgesetz: $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$

Assoziativgesetz: $(\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c})$



Mit Hilfe von geschlossenen Pfeilketten kann man die Koordinaten von Bildpunkten berechnen:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \oplus \overrightarrow{PP'}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 5 \\ 0{,}5 + 3{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P'\ (2|4)$$

Für den Mittelpunkt M $(x_M|y_M)$ einer Strecke $\overline{AB}$ mit A $(x_A|y_A)$ und B $(x_B|y_B)$ gilt:

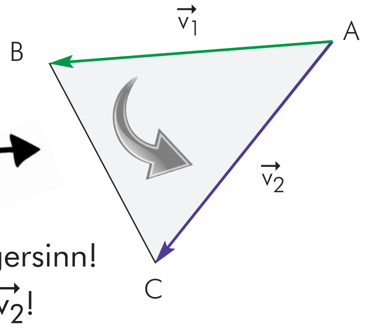
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

erstellt von A. Bönning

Flächeninhalt

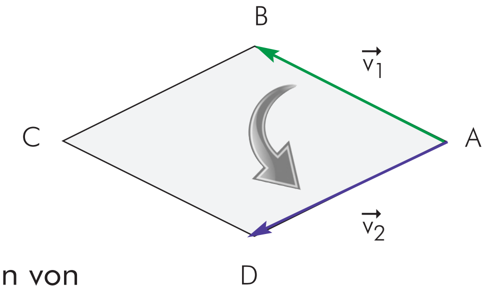
Ein von den Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ aufgespanntes **Dreieck** hat den Flächeninhalt:

$$A_{ABC} = 0{,}5 \cdot (a \cdot d - b \cdot c) = 0{,}5 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}^{*}$$



Gegen den Uhrzeigersinn!

☞ Zuerst $\vec{v}_1$, dann $\vec{v}_2$!



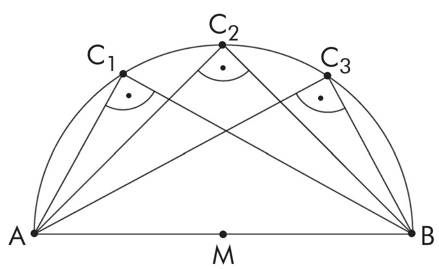
$^{*}\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ heißt **Determinante**

Ein von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ aufgespanntes **Parallelogramm** hat den Flächeninhalt:

$$A_{ABCD} = (a \cdot d - b \cdot c) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}^{*}$$

Der Kreis

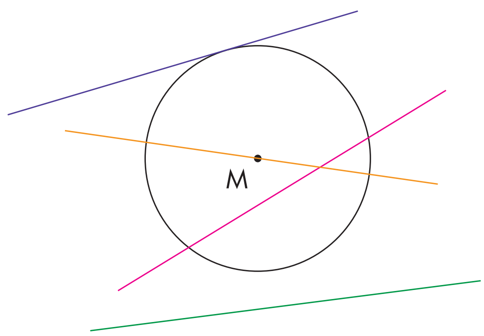
Der Satz des Thales



Verbindet man die Punkte C_n des Halbkreises über einer Mittelsehne mit den Endpunkten A und B, so haben die Winkel AC_nB das Maß 90 °.

Umgekehrt gilt: Hat der Winkel ACB das Maß 90°, so liegt sein Scheitel C auf dem Halbkreis über der Mittelsehne [AB].

Eine Gerade, die eine Kreislinie in einem Punkt berührt heißt, **Tangente**. Eine Gerade, die eine Kreislinie in keinem Punkt berührt, heißt **Passante**. Eine Gerade, die eine Kreislinie in zwei Punkten schneidet, heißt **Sekante**. Verläuft die Sekante durch den Mittelpunkt M des Kreises, nennt man sie **Zentrale**.



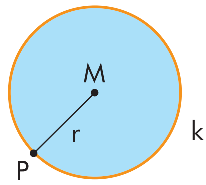
Grundwissen • Klasse 7 ⑦

erstellt von A. Bönning

Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

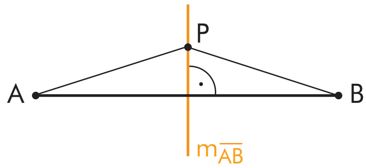
∧ und zugleich
∨ oder auch

Alle Punkte P der **Kreislinie** k haben von M die Entfernung r.
$k = \{P \mid |\overline{PM}| = r\}$
Alle Punkte P des **Kreisinneren** k_i sind von M weniger als r entfernt.
$k_i = \{P \mid |\overline{PM}| < r\}$
Alle Punkte P des **Kreisäußeren** k_a sind von M mehr als r entfernt.
$k_a = \{P \mid |\overline{PM}| > r\}$



Die **Mittelsenkrechte** zur Strecke $\overline{AB}$ ist die Symmetrieachse dieser Strecke. Alle Punkte P auf der Mittelsenkrechten m_{AB} sind von A und B gleich weit entfernt.

$m_{\overline{AB}} = \{P \mid |\overline{PA}| = |\overline{PB}|\}$

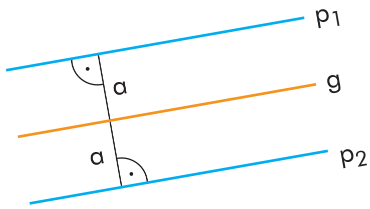


Alle Punkte P, die von einer Geraden g den gleichen Abstand a besitzen, liegen auf dem **Parallelenpaar** zur Geraden g.

$p_1 \cup p_2 = \{P \mid d\,(P;\, g) = a\}$

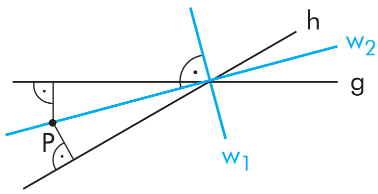
Alle Punkte P, die von zwei parallelen Geraden p_1 und p_2 den gleichen Abstand a besitzen, liegen auf der **Mittelparallelen**.

$g = \{P \mid d\,(P;\, p_1) = d\,(P;\, p_2)\}$



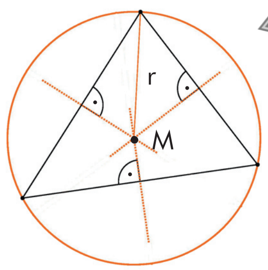
Alle Punkte P, die von zwei sich schneidenden Geraden g und h den gleichen Abstand haben, liegen auf den **Winkelhalbierenden** w_1 und w_2 der beiden Winkel zwischen den Geraden.

$w_1 \cup w_2 = \{P \mid d\,(P;\, g) = d\,(P;\, h)\}$

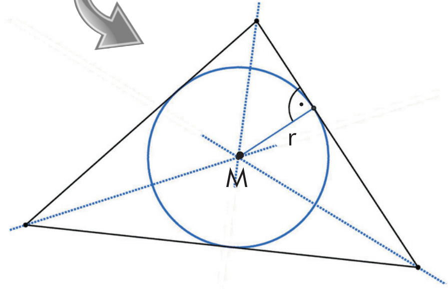


Die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten schneiden sich in einem Punkt M. Dieser Punkt ist Mittelpunkt des **Umkreises** des Dreiecks. Der Mittelpunkt M hat von den Eckpunkten des Dreiecks die Entfernung r.

Die Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M. Dieser Punkt ist Mittelpunkt des **Inkreises** des Dreiecks. M hat von den Dreiecksseiten den gleichen Abstand r.



Die Seitenhalbierenden eines Dreieckes schneiden sich im **Schwerpunkt** S des Dreiecks.

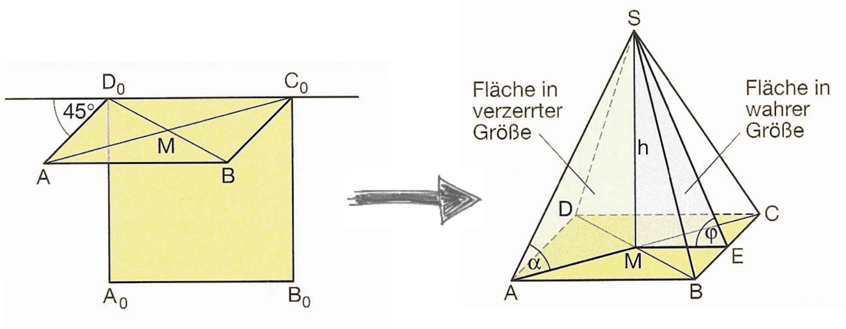


erstellt von A. Bönning

Zeichnen von Schrägbildern

Im Schrägbild erscheinen alle zur Schrägbildachse parallel verlaufenden Strecken, Flächen und Winkel in wahrer Größe. Strecken, die senkrecht zur Schrägbildachse verlaufen, werden verzerrt und verkürzt dargestellt.

Meist gilt:
Verzerrungswinkel $\omega = 45°$
Verzerrungsmaßstab $q = 0{,}5$



Geraden im Raum, die sich nicht schneiden und nicht parallel sind, heißen **windschief**.

Erfassen und Auswerten von Daten

Addiert man eine bestimmte Anzahl von Daten (Zahlen oder Größen) und dividiert diese Summe durch die Anzahl der Daten, so erhält man den Durchschnittswert oder das **arithmetische Mittel**. Die Differenz aus dem Maximum und Minimum heißt **Spannweite**. Ordnet man Daten der Größe nach, so ist der Wert, der genau in der Mitte steht, ein besonderer Mittelwert – der **Zentralwert** oder Median. Ist die Anzahl der Daten gerade, muss der Zentralwert erst berechnet werden. Der Wert, der am häufigsten auftritt, heißt **Modalwert**.

Beispiel: 55 Kinder werden nach ihrem Körpergewicht gefragt.
Folgende Tabelle zeigt, wie oft das jeweilige Gewicht vorkam.

7 Körpergewichte in kg	42	45	46	47	49	54	58
Häufigkeit	3	9	23	5	7	6	2

arithmetisches Mittel: $\frac{(42 + 45 + 46 + 47 + 49 + 54 + 58)\text{ kg}}{7} = 48{,}7\text{ kg}$

Spannweite: 58 kg – 42 kg = 16 kg
Zentralwert: 47 kg
Modalwert: 46 kg

Oft ist es zu aufwendig, in einer Umfrage die **Gesamtheit** zu befragen. Deshalb beschränkt man sich auf eine **Stichprobe**. Damit man von der Stichprobe auf die Gesamtheit schließen kann, muss die Stichprobe genügend groß sein. Außerdem muss die Stichprobe ein verkleinertes Bild der Gesamtheit sein. Eine solche Umfrage nennt man dann **repräsentativ**.